Feladat 1. *(1pt) Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_2^3$ gyűrű részgyűrűit és ideáljait.*

Feladat 2. *(1pt) Tekintsük a $2\mathbb{Z}_{16}$ gyűrűt. Határozzuk meg ennek az ideáljait, és adjuk meg az ideálok szorzásának művelettábláját.*

Feladat 3. *(1pt) Hány $\mathbb{Z}_{25} \to \mathbb{Z}_{60}$ gyűrűhomomorfizmus van?*

Feladat 4. *(1pt) Hány endomorfizmusa van a $\mathbb{Z}_2^2$ gyűrűnek?*

Feladat 5. *(2pt) Van-e a $\mathbb{C}$ gyűrűnek olyan részgyűrűje, aminek van direkt felbontható homomorf képe?*

Feladat 6. *(2pt) Legyenek $\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{R}_2$ gyűrűk, $\mathbf{I}_1 \lhd \mathbf{R}_1$ és $\mathbf{I}_2 \lhd \mathbf{R}_2$. Igazoljuk, hogy az $\{(a_1, a_2) : a_1 \in I_1,\ a_2 \in I_2\}$ halmaz ideál $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$-ben.*

Feladat 7. *(2pt) Adjuk meg a $\mathbb{Z}^2$ gyűrű egy olyan 3 indexű részgyűrűjét, ami nem ideál. (Részgyűrű indexén az additív részcsoport indexét értjük.)*

Feladat 8. *(2pt) Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{I}_1$ és $\mathbf{I}_2$ egymást nem tartalmazó ideálok az $\mathbf{R}$ gyűrűben, akkor $I_1 \cup I_2$ biztosan nem ideál $\mathbf{R}$-ben.*

Feladat 9. *(2pt) Igaz, hogy ha $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$ egységelemes gyűrűk, akkor minden $\mathbf{R}$-ből $\mathbf{S}$-be menő homomorfizmus $1_\mathbf{R}$-t $1_\mathbf{S}$-be viszi?*

Feladat 10. *(3pt) Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{R}$ gyűrű, $\mathbf{I} \lhd \mathbf{R}$, $\mathbf{J} \lhd \mathbf{I}$, és $\mathbf{J}$ egységelemes gyűrű, akkor $\mathbf{J} \lhd \mathbf{R}$.*

Feladat 11. *(3pt) Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy r elemének* centralizátora *a $C_r : \{s \in R : rs = sr\}$, a gyűrű* centruma *pedig a $\bigcap_{r\in R} C_r$ halmaz. Igazoljuk, hogy a centrum részgyűrű $\mathbf{R}$-ben. Az is igaz, hogy mindig ideál?*

Feladat 12. *(3pt) Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy r elemének* annulátora *az $A_r : \{s \in R : rs = sr = 0\}$, a gyűrű annulátora pedig a $\bigcap_{r\in R} A_r$ halmaz. Igazoljuk, hogy $\mathbf{R}$ annulátora részgyűrűje $\mathbf{R}$-nek. Az is igaz, hogy mindig ideál?*

Feladat 13. *(3pt) Létezik négyelemű nemkommutatív gyűrű?*

Feladat 14. *(3pt) Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy $\mathbf{A}$ részgyűrűjét* balideálnak *nevezzük, ha minden $r \in R$ és $a \in A$ esetén $ra \in A$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{V}$ vektortér tetszőleges $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ alterére azok a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ leképezések, amelyekre $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq U$, balideált alkotnak $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$-ben. ($\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ a $\mathbf{V}$ lineáris transzformációinak gyűrűje.) Ezután adjunk meg a 2×2-es valós mátrixok gyűrűjében egy nemtriviális valódi balideált.*

Feladat 15. *(3pt) Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy $\mathbf{A}$ részgyűrűjét* jobbideálnak *nevezzük, ha minden $r \in R$ és $a \in A$ esetén $ar \in A$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\mathbf{V}$ vektortér tetszőleges $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ alterére azok a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ leképezések, amelyekre $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq U$, jobbideált alkotnak $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$-ben. ($\mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ a $\mathbf{V}$ lineáris transzformációinak gyűrűje.) Ezután adjunk meg a 2×2-es valós mátrixok gyűrűjében egy nemtriviális valódi jobbideált.*

Feladat 16. *(3pt) Tekintsük a $\mathbb{Z}_2^3$ Abel-csoportot. Adjunk meg ezen három különböző szorzást úgy, hogy akármelyiket hozzáadva az Abel-csoporthoz gyűrű adódjon.*

Feladat 17. *(4pt) Legyen $\mathbf{R}_2$, illetve $\mathbf{R}_3$ a $\mathbb{Z}_2$ feletti 2×2-es, illetve 3×3-as mátrixok gyűrűje. Hány homomorfizmus van $\mathbf{R}_2$-ből $\mathbf{R}_3$-ba?*

Feladat 18. *(4pt) Legyenek $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$ véges egységelemes gyűrűk. Igazoljuk, hogy*

$$|\operatorname{Id}(\mathbf{R} \times \mathbf{S})| = |\operatorname{Id}\mathbf{R}| \cdot |\operatorname{Id}\mathbf{S}|.$$

Feladat 19. *(4pt) Legyen $\mathbf{R}$ tetszőleges gyűrű, valamint $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3 \lhd \mathbf{R}$ úgy, hogy $\mathbf{I}_1 \leq \mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 \cap \mathbf{I}_3$, valamint $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$.*

Feladat 20. *(4pt) Tekintsük a $\mathbb{Z}_2$ feletti 3×3-as mátrixgyűrű*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemét. Van egy halmazunk, amiben eredetileg csak az A mátrix van. Ezután újabb mátrixokat tehetünk a halmazba: ha egy X már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük az X-nek tetszőleges $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$-beli elemmel vett (akármilyen sorrendű) szorzatát, ha pedig az X_1 és az X_2 permutációk már benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a $X_1 X_2$ mátrixot. Legalább hány euróra van szükségünk, hogy $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$ bármely elemét beletehessük a halmazba?

Feladat 21. *(4pt) Tekintsük a $\mathbb{Z}_2$ feletti 3×3-as mátrixgyűrű*

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemét. Van egy halmazunk, amiben eredetileg csak az A mátrix van. Ezután újabb mátrixokat tehetünk a halmazba: ha egy X már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük az X-nek tetszőleges $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$-beli elemmel vett (akármilyen sorrendű) szorzatát, ha pedig az X_1 és az X_2 permutációk már benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük a $X_1 X_2$ mátrixot. Legalább hány euróra van szükségünk, hogy $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$ bármely elemét beletehessük a halmazba?